WIKIPEDIA

Pi greco

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Il **Pi greco** è una costante matematica, indicata con la lettera greca π (*pi*), scelta in quanto iniziale di περιφέρεια (perifereia), circonferenza in greco.

Nella geometria piana il π viene definito come il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del suo diametro, o anche come l'area di un cerchio di raggio 1. Molti libri moderni di analisi matematica definiscono il π usando le funzioni trigonometriche: per esempio come il più piccolo numero strettamente positivo per cui $\sin(x) = 0$ oppure il più piccolo numero che diviso per 2 annulla $\cos(x)$. Tutte queste definizioni sono equivalenti.

Il π è conosciuto anche come **costante di Archimede** (da non confondere con il numero di Archimede) e **costante di Ludolph** o **numero di Ludolph**. Il π non è una costante fisica o naturale, ma una costante matematica definita in modo astratto, indipendente da misure di carattere fisico.

Questo è il valore del π troncato alla 100ª cifra decimale[1][2]:

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679

Pi greco	
Simbolo	π
Valore	3,14159265358979...
Frazione continua	[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, …] (sequenza A001203 dell'OEIS)
Insieme	numeri trascendenti
Costanti correlate	Costante di Gelfond, Costanti zeta

0 1 2 3 4 π

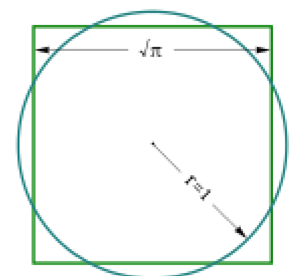
Il rapporto tra la lunghezza della circonferenza di una ruota e il suo diametro è π

Indice

Proprietà

Il π è un numero irrazionale, quindi non può essere scritto come quoziente di due interi, come dimostrato nel 1761 da Johann Heinrich Lambert. Inoltre, è un numero trascendente (ovvero non è un numero algebrico): questo fatto è stato provato da Ferdinand von Lindemann nel 1882. Ciò significa che non ci sono polinomi con coefficienti razionali di cui il π è radice, quindi è impossibile esprimere il π usando un numero finito di interi, di frazioni e di loro radici.

Questo risultato stabilisce l'impossibilità della quadratura del cerchio, cioè la costruzione con riga e compasso di un quadrato della stessa area di un dato cerchio.



Poiché π è un numero trascendente, quadrare il cerchio non è possibile in un numero finito di passi usando riga e compasso.

Applicazioni

Geometria analitica

- Circonferenza di un cerchio o di una sfera di raggio r:

$$C = 2\pi r$$

- Area di un cerchio di raggio r:

$$A = \pi r^2$$

- Area di un'ellisse di semiassi a e b:

$$A = \pi ab$$

- Volume di una sfera di raggio r:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Superficie di una sfera di raggio r:

$$S = 4\pi r^2$$

- Volume di un cilindro di altezza h e raggio r:

$$V = \pi r^2 h$$

- Superficie di un cilindro di altezza h e raggio r:

$$S = 2\pi r \cdot (r + h)$$

- Angoli: 180 gradi equivalgono a π radianti.
- Volume di un cono di altezza h e raggio r:

$$V = \pi r^2 \frac{h}{3}$$

Analisi

- Formula di Viète, 1593:

$$2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots = \pi$$

- Formula di Leibniz:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

dalla quale si ricava che:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{17 \cdot 19} + \cdots = \frac{\pi}{8}$$

- Formula di Nilakantha

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 9} + \cdots = \pi - 3$$

Una serie molto elegante, che fornisce direttamente le cifre decimali di π.

- Formula di Madhava (circa 1400)

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \cdots\right)$$

- Prodotto di Wallis:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots = \frac{\pi}{2}$$

- Problema di Basilea, risolto da Eulero:

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

- Formula che usa la funzione zeta di Riemann:

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

- Prodotto di Eulero, in cui il prodotto percorre tutti i numeri primi:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{7^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{11^2}\right)}\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

- Integrale di Gauss:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

- Integrale di Eulero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-u^2}{2}}\,du = \sqrt{2\pi}$$

- Altri integrali definiti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{4}$$

- Integrale di Fresnel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

- Funzione gamma:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- Approssimazione di Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- Funzione phi di Eulero:

$$\sum_{k=0}^{n} \phi(k) \sim 3n^2/\pi^2$$

- Identità di Eulero, definita da Richard Feynman «la più notevole formula della matematica»:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

- Prodotto infinito di Eulero con i numeri primi dispari:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{8} \times \frac{11}{12} \times \frac{13}{12} \times \frac{17}{16} \times \frac{19}{20} \times \frac{23}{24} \times \frac{29}{28} \times \frac{31}{32} \times \cdots$$

  dove al numeratore vi sono tutti i numeri primi dispari e al denominatore il multiplo di quattro più vicino al numeratore.

  Una formula notevole che dimostra, come il prodotto di Eulero, la sorprendente relazione tra pi greco e i numeri primi. È però di convergenza molto lenta e quindi inadatta al calcolo dei decimali di π.[3]

- Formula basata sulla serie armonica, con "correzione" dei segni (Eulero, 1748)

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \cdots$$

  dove i segni si determinano come segue: il numero 2 ha segno positivo; i numeri primi della forma $4m-1$ hanno segno positivo; i numeri primi della forma $4m+1$ hanno segno negativo; per i numeri composti il segno è il prodotto dei segni dei singoli fattori.[4]

  Anche questa serie, pur molto notevole ed elegante, è di convergenza estremamente lenta. Occorre infatti sommare oltre 2 milioni di termini per ottenere due decimali esatti.[5]

- Formula ricavata da quella di Taylor, sempre di Eulero:

$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} - \dots\right)$$

  dove n = 3. Più frazioni si aggiungono più il risultato è preciso.

- Teorema dei residui:

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

- Frazione continua di Ramanujan:

$$\sqrt{\phi^2+1} = \phi + \cfrac{e^{-2\pi/5}}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\cdots}}}}$$

  dove ϕ è il rapporto aureo $(1,618\ldots)$.

- Frazione continua generalizzata (o frazione frattale) di Ramanujan

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cdots}}}}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{e}\pi}{2}}.$$

- Formula che lega la costante di Eulero-Mascheroni e la funzione gamma, da cui deriva il pi greco:

$$\pi = \left(\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\gamma)\Gamma(1/2-\gamma)} + \frac{2\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1/2-\gamma)}\right)^2 \left(\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1/2-\gamma/2)}{\Gamma(\gamma/2)}\right)^4$$

- Data una semicirconferenza di raggio r con centro nell'origine del piano cartesiano, πr è definibile come lunghezza in forma cartesiana esplicita su tutto il dominio della funzione che descrive la semicirconferenza:

$$\begin{aligned} &f(x) := \sqrt{r^2-x^2} \\ &\pi = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\sqrt{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{x^2}{r^2-x^2}+1}\,dx \\ &= [\arcsin(1)-\arcsin(-1)] \end{aligned}$$

Teoria dei numeri

- La probabilità che due interi scelti a caso siano primi fra loro è di: $\frac{6}{\pi^2}$ (≈60,8%)
- Il numero medio di modi in cui è possibile scrivere un intero positivo come somma di due quadrati perfetti è: $\frac{\pi}{4}$.

Sistemi dinamici, teoria ergodica

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} = \frac{2}{\pi}$ per quasi tutti i reali x_0 in $[0, 1]$ dove gli x_i sono iterazioni della mappa logistica per $r = 4$.

Probabilità e statistica

- Funzione di densità di probabilità nella distribuzione normale univariata:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Buffon fu il primo a scoprire un equivalente statistico del calcolo di π, noto come ago di Buffon, ma non lo impiegò per stimare il numero.[6]

Aerodinamica

- La massima pendenza (teoria di Glauert) del tratto lineare della curva C_L/α (ovvero coefficiente di portanza diviso l'angolo di incidenza) per qualsiasi profilo alare bidimensionale sottile è 2π.

Fisica

- Periodo delle piccole oscillazioni del pendolo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Equazione di campo di Einstein della relatività generale:

$$R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

- Forza di Coulomb:

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

La presenza di π in queste due ultime formule, però, è conseguenza della definizione adottata per le costanti fisiche ϵ_0 e h.

Frazioni continue

Come ogni numero irrazionale, π non può essere espresso come una frazione di due numeri interi, ma ammette una rappresentazione come frazione continua[7]

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}}$$

Troncando la frazione continua in un qualunque punto si ottengono le approssimazioni razionali di π, di cui le prime sono 3, 22/7, 333/106 e 355/113, le più conosciute e storicamente usate approssimazioni di π. La frazione continua di π non è periodica (in quanto π non è un numero irrazionale quadratico) né possiede una ovvia struttura,[7] tuttavia vari matematici hanno scoperto delle rappresentazioni come frazioni continue generalizzate che seguono un chiaro schema:[8]

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ddots}}}}}} = 3 + \cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{6+\ddots}}}}} = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ddots}}}}}.$$

ottenuta mediante la formula della frazione continua di Eulero applicata alla funzione $arctan(x)$ per $x = 1$
;

$$2\pi = 6 + \cfrac{2^2}{12+\cfrac{6^2}{12+\cfrac{10^2}{12+\cfrac{14^2}{12+\cfrac{18^2}{12+\ddots}}}}}.$$

Approssimazioni numeriche

A causa della sua natura trascendente, non ci sono semplici espressioni finite che rappresentano π. Di conseguenza i calcoli numerici devono usare approssimazioni del numero. In molti casi, 3,14 è sufficiente, ma molti ingegneri spesso usano 3,1416 (cinque cifre significative) o 3,14159 (6 cifre significative).

$$\pi \simeq 3{,}14159\ 26535\ 8979\ldots$$

Uno scriba egizio di nome Ahmes è lo scrittore del più antico testo conosciuto contenente un'approssimazione di π, il papiro di Rhind, datato al XVII secolo a.C. e descrive il valore come 256/81 oppure 3,160.

Archimede elaborò un metodo con cui è possibile ottenere approssimazioni comunque buone di π e lo usò per dimostrare che è compreso tra 223/71 e 22/7 (la media dei due valori è circa 3,1419).

Il matematico cinese Liu Hui calcolò π come 3,141014 (scorretto dalla quarta cifra decimale) nel 263 e suggerì 3,14 come buona approssimazione.

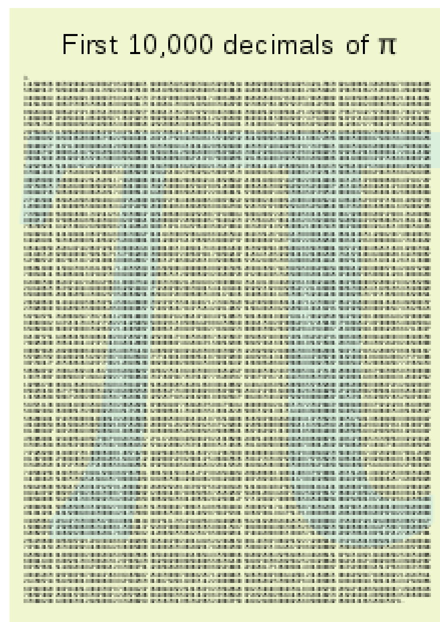
Il matematico e astronomo cinese Zu Chongzhi calcolò nel V secolo π come compreso fra 3,1415926 e 3,1415927 e diede due approssimazioni di π: 355/113 e 22/7.

Il matematico e astronomo iraniano Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi, 1350-1439, calcolò le prime 9 cifre in base 60 di π, che sono equivalenti nella base decimale alle 16 cifre:

$$2\pi = 6,2831853071795865$$

Il matematico tedesco Ludolph van Ceulen (1600 circa) calcolò i primi 35 decimali. Era così fiero del suo risultato che lo fece scrivere sulla sua lapide.

Il matematico e gesuita polacco Adam Adamandy Kochański espose in un suo trattato del 1685 una costruzione geometrica che consente di calcolare un valore approssimato di π corretto fino alla quarta cifra decimale.



Prime 10 000 cifre decimali di *pi greco*.

Il matematico sloveno Jurij Vega nel 1789 calcolò le prime 140 cifre decimali di π, di cui le prime 137 erano corrette, e mantenne il record mondiale per 52 anni, fino al 1841, quando William Rutherford calcolò 208 cifre decimali di cui le prime 152 erano corrette. Vega migliorò la formula proposta da John Machin nel 1706.

Altre possibili approssimazioni di π:

$$\pi \approx \frac{\sqrt{2}}{10} + 3 = 3{,}14142\ldots$$
$$\sqrt[2]{\frac{227}{23}} = 3{,}14158\ldots$$
$$\sqrt[3]{31} = 3{,}1413\ldots$$
$$\sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3{,}14159\,26525\ldots$$
$$\sqrt[5]{306} = 3{,}14155\ldots$$
$$\sqrt[6]{\frac{17305}{18}} = 3{,}1415924\ldots$$

Tuttavia, nessuna delle formule sopraelencate può fornire un efficiente metodo per l'approssimazione di π. Per calcoli veloci, si può usare una formula come quella di Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Insieme con l'espansione delle serie di Taylor per la funzione $\arctan(x)$. Questa formula si può verificare facilmente usando le coordinate polari dei numeri complessi, partendo da:

$$(5+i)^4 \cdot (-239+i) = -114244 - 114244\,i.$$

Formule di questo genere sono note come *formule di tipo Machin*.

Espansioni decimali molto lunghe di π sono calcolate tipicamente con l'algoritmo Gauss-Legendre e l'algoritmo Borwein; in passato era usato anche l'algoritmo Salamin-Brent, inventato nel 1976.

L'elenco del primo milione di cifre di π e di $1/\pi$ si può trovare sul Progetto Gutenberg (vedi il collegamento esterno a fondopagina).

Nel dicembre 2002 il calcolo è arrivato a 1 241 100 000 000 cifre ($1{,}2411 \times 10^{12}$), calcolate nel settembre 2002 da Yasumasa Kanada su un supercomputer Hitachi a 64 nodi con un terabyte di memoria principale, in grado di compiere 2 miliardi di operazioni per secondo, quasi il doppio del computer usato per il precedente record (206 miliardi di cifre).

Sono state usate le seguenti formule di tipo Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443}$$

K. Takano (1982).

$$\frac{\pi}{4} = 44 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} - 12 \arctan \frac{1}{682} + 24 \arctan \frac{1}{12943}$$

F. C. W. Störmer (1896).

Approssimazioni così precise non sono in realtà utilizzate per nessuno scopo pratico, se non per provare le prestazioni di nuovi supercomputer o per analisi statistiche sulle cifre di π.

Nel 1996 David H. Bailey, insieme a Peter Borwein e Simon Plouffe, scoprì una nuova formula per calcolare π come serie infinita:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

Questa formula permette di calcolare facilmente la k-esima cifra binaria o esadecimale di π senza dover calcolare tutte le cifre precedenti. Il sito web di Bailey (http://crd.lbl.gov/~dhbailey/pi/) ne contiene l'implementazione in vari linguaggi di programmazione.

Alcune altre formule usate per calcolare stime di π sono:

- $$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!!} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots$$

  da Newton ($n!!$ indica il semifattoriale).

- $$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

  nota come prodotto infinito di Wallis.

- $$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

nota come formula di Viète.

- $$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

  da Ramanujan.

- $$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

  da David Chudnovsky e Gregory Chudnovsky.

- $$\pi = 20 \arctan \frac{1}{7} + 8 \arctan \frac{3}{79}$$

  da Eulero.

- $$\pi = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2-1}\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{35}\right)\cdots}{\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots}$$

  nota come Formula simmetrica

- $$\frac{\pi}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{2}-1)^{2k+1}}{2k+1}.$$

  $$\frac{\pi}{12} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2-\sqrt{3})^{2k+1}}{2k+1}.$$

  da Chebyshev

- $$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k \, 3^{\frac{1}{2}-k}}{2k+1}$$

- $$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{4^n} \zeta(n+1)$$

Altre formule d'approssimazione sono contenute nella tabella sottostante:[9][10]

$\pi = \frac{1}{Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^3 (42n+5)}{(n!)^6 16^{3n+1}}$
$\pi = \frac{4}{Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!(21460n+1123)}{(n!)^4 441^{2n+1} 2^{10n+1}}$
$\pi = \frac{4}{Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{4^n (n!)^3}$
$\pi = \frac{32}{Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8n} \frac{(42n\sqrt{5}+30n+5\sqrt{5}-1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n (n!)^3}$
$\pi = \frac{27}{4Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{27}\right)^n \frac{(15n+2)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}$
$\pi = \frac{15\sqrt{3}}{2Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{125}\right)^n \frac{(33n+4)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}$
$\pi = \frac{85\sqrt{85}}{18\sqrt{3}Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{85}\right)^n \frac{(133n+8)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}$
$\pi = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{125}\right)^n \frac{(11n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}$
$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^n}$
$\pi = \frac{\sqrt{3}}{9Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(40n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 49^{2n+1}}$
$\pi = \frac{2\sqrt{11}}{11Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(280n+19)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 99^{2n+1}}$
$\pi = \frac{\sqrt{2}}{4Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^{2n+1}}$
$\pi = \frac{4\sqrt{5}}{5Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(644n+41)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 5^n 72^{2n+1}}$
$\pi = \frac{4\sqrt{3}}{3Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (28n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 3^n 4^{n+1}}$
$\pi = \frac{4}{Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (20n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 2^{2n+1}}$
$\pi = \frac{72}{Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!(260n+23)}{(n!)^4 4^{4n} 18^{2n}}$

$\pi = \frac{3528}{Z}$	$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!(21460n+1123)}{(n!)^4 4^{4n} 882^{2n}}$

Storia

I popoli antichi spesso utilizzavano modi indiretti per esprimere approssimativamente il rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio. I babilonesi usavano per π il valore di $^{25}\!/_{8}$=3,125 (usato anche da Vitruvio[11]): una tavoletta cuneiforme del XX secolo a.C., infatti, osserva che il rapporto fra la circonferenza e il perimetro di un esagono iscritto è 3600/3456, cioè 25/24. Nel Papiro di Rhind, invece, si dice che un cerchio con diametro 9 unità è equivalente a un quadrato di lato 8. In questo modo gli Egizi assumevano il valore di $(^{16}\!/_{9})^2$=3,160.

Nell'Antico Testamento viene apparentemente affermato in modo non esplicito che $\pi = 3$. Si trova infatti scritto:

> «Egli fece il mare come una gran vasca di bronzo fuso, dieci cubiti da una sponda all'altra: era perfettamente circolare. La sua altezza era cinque cubiti e una linea di trenta cubiti misurava la sua circonferenza»
>
> (Secondo libro delle Cronache, 4:2)

Il testo, però spiega poco dopo che il bordo si apriva "come il calice di un giglio" (presentava cioè quello che un moderno ingegnere chiamerebbe un "anello di irrigidimento" del bordo superiore), perciò il diametro misurato al bordo era ovviamente maggiore di quello della circonferenza esterna della vasca cilindrica, rendendo inaccurati questi dati per desumere un valore di pi greco "biblico".[12]

Il primo ad approssimare scientificamente pi greco fu Archimede di Siracusa che nel III secolo a.C. utilizzò poligoni regolari inscritti e circoscritti a una circonferenza. Aumentando il numero di lati il rapporto tra il perimetro e l'area limita superiormente e inferiormente π (vedi anche metodo di esaustione).

Utilizzando poligoni di 96 lati lo scienziato siracusano scoprì che $^{223}\!/_{71} < \pi < {}^{22}\!/_{7}$.[13]

Nel medioevo in India Brahmagupta utilizza il valore $\sqrt{10}$[14] mentre in Cina Zu Chongzhi utilizza $^{355}\!/_{113}$ valore che si discosta meno di 0,3 milionesimi dal valore corretto.[15]

Il metodo di Archimede verrà applicato fino all'epoca moderna. Nel 1610 Ludolph van Ceulen calcola le prime 35 cifre decimali di π utilizzando poligoni con più di 2 miliardi di lati. Ceulen, fiero di questo risultato, lo farà scrivere sulla sua tomba.

Sempre nell'epoca moderna vengono trovate importanti espressioni infinite:

Formula di Viète: $2\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots = \pi$

Formula di Leibniz: $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$

Prodotto di Wallis: $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots = \frac{\pi}{2}$

Nel XVIII secolo Eulero, risolvendo il problema di Basilea trovò un'altra elegante serie:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Sempre al matematico svizzero è dovuta l'identità di Eulero, talvolta considerata la formula più bella di tutta la matematica,[16] che collega π ad altre importanti costanti matematiche tra cui e e i:

$$e^{i\pi}+1=0$$

Queste formule, pur essendo di scarsa o nulla utilità nel calcolo della costante matematica, hanno un importante valore estetico e rivelano collegamenti inaspettati tra varie branche della matematica.

Eulero rese inoltre popolare il simbolo π, introdotto nel 1706 dal matematico inglese William Jones quando pubblicò *A New Introduction to Mathematics*, benché lo stesso simbolo fosse stato utilizzato in precedenza per indicare la circonferenza del cerchio. La notazione diventò di uso comune dopo che la utilizzò Eulero. In entrambi i casi π è la prima lettera di *περίμετρος* (perimetros), che significa «misura attorno» in greco. Inoltre il simbolo π venne usato all'inizio dallo stesso William Jones che nel 1706 lo usò in onore di Pitagora (l'iniziale di Pitagora nell'alfabeto greco è appunto Π, ma trattandosi di un numero si preferisce usare la minuscola). Tuttavia, ancora nel 1739 Eulero usava il simbolo p.

Restava ancora in sospeso la questione della natura di π: Johann Heinrich Lambert dimostrò nel 1761 che si trattava di un numero irrazionale (si dimostrava che l'arcotangente di un qualsiasi numero razionale è irrazionale). Si veda anche dimostrazione della irrazionalità di π. Adrien-Marie Legendre dimostrò nel 1794 l'irrazionalità di π^2. Bisognerà tuttavia aspettare fino al 1882 perché Ferdinand von Lindemann dimostri che π è un numero trascendente, ossia non è radice di nessun polinomio a coefficienti razionali.

Quest'ultimo fatto dimostrava inequivocabilmente che la quadratura del cerchio tramite riga e compasso è impossibile.

Nel 1897 il matematico dilettante J. Goodwin propose nello stato dell'Indiana un incredibile disegno di legge volto a rendere possibile la quadratura del cerchio tramite il cambiamento del valore di pi greco[17]. Il disegno prevedeva l'introduzione di una *"nuova verità matematica"* giacché *"la regola ora in uso ... non funziona"* ed *"è opportuno che essa venga rifiutata come insufficiente e ingannevole per le applicazioni pratiche"*. La stravagante proposta di legge fu approvata all'unanimità dai 67 membri della Commissione per l'educazione. La proposta di legge fu affondata solo dopo il parere negativo del matematico Clarence Waldo, presente casualmente in Senato.

Ecco una breve cronologia essenziale di π:

Nell'antichità

- XX secolo a.C.: i Babilonesi usano $25/8$ per π(=3,125)
- XVII secolo a.C.: gli Egizi (Papiro di Rhind) usano $\pi = (16/9)^2 = 3{,}1605$
- XII secolo a.C.: i Cinesi usano 3 per π
- 434 a.C.: Anassagora tenta la quadratura del cerchio con riga e compasso
- 430 a.C.: Antifonte il sofista e Brisone di Eraclea esprimono il principio di esaustione
- 335 a.C.: Dinostrato usa la quadratrice per quadrare il cerchio
- III secolo a.C.: Archimede, utilizzando l'esaustione e il metodo di compressione, calcola su poligoni di 96 lati che $223/71 < \pi < 22/7$[18] e trova inoltre l'approssimazione $\pi = 211875/67441 = 3{,}14163\ldots$

- I secolo a.C.: Vitruvio usa $^{25}/_{8}$[11]
- II secolo d.C.: Tolomeo usa π = $^{377}/_{120}$ = 3,14166…[19]
- III secolo d.C.: Chang Hong usa $\pi = \sqrt{10}$, Wang Fau usa π = $^{142}/_{45}$ e Liu Hui usa π = $^{157}/_{50}$

Nel Medioevo

- V secolo (450 circa): Zu Chongzhi scopre che 3,1415926 < π < 3,1415927 e utilizza il valore $^{355}/_{113}$ = 3,1415929…
- VI secolo (530 circa): Aryabhata, in India, utilizza il valore $^{62832}/_{20000}$=3,1416
- VII secolo (650 circa): Brahmagupta, in India, utilizza il valore $\sqrt{10}$=3,1623
- IX secolo: al Khwarizmi usa 3,1416
- 1220: Leonardo Fibonacci usa il valore 3,141818
- 1430: al Kashi calcola le prime 14 cifre di π

Nell'età moderna

- 1573: Valenthus Otho calcola le prime 6 cifre di π
- 1593: François Viète calcola 9 cifre di π e Adriaan van Roomen 16 cifre
- 1596: Ludolph van Ceulen calcola 20 cifre di π
- 1610: van Ceulen, 35 cifre
- 1621: Willebrord Snell perfeziona il metodo di Archimede
- 1654: Christiaan Huygens dimostra la validità del perfezionamento di Snell
- 1655: John Wallis trova un prodotto infinito razionale per π; William Brouncker lo converte in una frazione continua
- 1663: Muramatsu Shigekiyo in Giappone trova 7 cifre decimali esatte
- 1665: Isaac Newton scopre il calcolo infinitesimale e calcola il π fino alla 16ª cifra decimale
- 1671: James Gregory scopre le serie delle arcotangenti
- 1674: Leibniz scopre la serie delle arcotangenti per π
- 1699: Abraham Sharp, 72 cifre
- 1700: Seki Kowa in Giappone calcola 10 cifre
- 1706: John Machin, 100 cifre
- 1713: La Corte Cinese pubblica il Su-li Ching-yun e presenta le prime 19 cifre decimali di π
- 1719: Thomas Fantet de Lagny calcola 127 cifre, di cui 112 sono corrette
- 1723: Takebe Kenko in Giappone calcola 41 cifre
- 1730: Kamata in Giappone calcola 25 cifre
- 1734: Adottato da Eulero, l'uso del simbolo π si diffonde
- 1739: Matsunaga, 50 cifre
- 1748: Eulero pubblica l'Introductio in analysis infinitorium contenente il cosiddetto Teorema di Eulero e molte serie per π e π^2
- 1761: Johann Heinrich Lambert prova che π è un numero irrazionale
- 1775: Eulero deriva una serie di arcotangenti rapidamente convergenti e ipotizza che π possa essere trascendente

Nell'età contemporanea

- 1794 – Jurij Vega, 140 cifre, di cui 136 sono corrette
- 1794 – Adrien-Marie Legendre dimostra che π^2 (e quindi π) è irrazionale e considera la possibilità che π sia trascendente
- 1841 – William Rutherford calcola 208 cifre, di cui 152 sono corrette
- 1844 – Zacharias Dase calcola 200 cifre
- 1847 – Thomas Clausen, 248 cifre
- 1853 – Lehmann, 261 cifre
- 1853 – William Rutherford, 440 cifre
- 1855 – Richter, 500 cifre
- 1874 – William Shanks, 707 cifre, ma solo 527 sono corrette
- 1874 – Tseng Chi-hung calcola in Cina 100 cifre
- 1882 – Ferdinand von Lindemann dimostra che π è trascendente.

- 1947 - D. F. Ferguson: 620 cifre decimali, utilizzando una calcolatrice da tavolo
- gennaio 1947 - D. F. Ferguson: 710 cifre decimali (calcolatrice da tavolo)
- settembre 1947 – D. F. Ferguson: 808 cifre decimali (calcolatrice da tavolo)
- 1949 – George Rietwiesner, John von Neumann e Nicholas Constantine Metropolis: 2037 cifre calcolate in 70 ore utilizzando l'ENIAC. Da questo momento in poi tutti i calcoli delle cifre di pi greco verranno effettuati utilizzando calcolatori elettronici.
- 1954 – La marina statunitense calcolò 3089 cifre in 13 minuti alla presentazione del NORC (il supercomputer commissionato alla IBM)
- 1958 – "Paris Data Processing Center": 10 000 cifre calcolate in un'ora e 40 minuti utilizzando un IBM 704
- 1961 – John Wrench e Daniel Shanks (nessuna parentela con William Shanks): 100 265 cifre in 8 ore e 43 minuti, con un IBM 7090
- 1966 – "Paris Data Processing Center": 250 000 cifre di pi greco con un IBM 7030 Stretch
- 1967 – "Paris Data Processing Center": 500 000 cifre con un computer CDC 6600
- 1973 – Jean Guilloud e M. Bouyer: 1 000 000 di cifre calcolate in 23 ore e 18 minuti con il computer CDC 7600
- 1976 – Eugene Salamin e Richard Brent svilupparono indipendentemente un algoritmo quadraticamente convergente per il calcolo del π, algoritmo che poi risultò molto simile a quello per la valutazione degli integrali ellittici di Carl Friedrich Gauss
- 1982 – Yoshiaki Tamura e Yasumasa Kanada: 8 388 608 cifre in meno di 30 ore con l'algoritmo di Gauss-Brent-Salamin, con un Hitachi M-280H
- 1988 – Yasumasa Kanada: 201 326 000 cifre calcolate in 6 ore utilizzando un Hitachi S-820
- maggio 1989 – i fratelli David Chudnovsky e Gregory Chudnovsky: 480 000 000 di cifre
- giugno 1989 – David Chudnovsky e Gregory Chudnovsky: 535 339 270 di cifre
- luglio 1989 – Yasumasa Kanada: 536 870 898 di cifre
- agosto 1989 – David Chudnovsky e Gregory Chudnovsky: 1 011 196 691 di cifre (oltre 1 miliardo), su un IBM 3090
- 19 novembre 1989 – Yasumasa Kanada e Yoskiaki Tamura: 1 073 740 799 di cifre (1,07 miliardi), HITAC S-3800/480
- 18 maggio 1994 – David Chudnovsky e Gregory Chudnovsky: 4 044 000 000 di cifre (oltre 4 miliardi), utilizzando un computer domestico. Dettagli sconosciuti, record non verificato.
- 26 giugno 1994 – Yasumasa Kanada e Daisuke Takahashi: 3 221 220 000 di cifre (3,22 miliardi)[20]
- 11 ottobre 1995 – Yasumasa Kanada e Daisuke Takahashi: 6 442 450 000 di cifre (6,44 miliardi)[21]

- 1997 – Yasumasa Kanada e Yoshiaki Tamura: 51 539 607 552 di cifre (51,5 miliardi) calcolate in poco più di 29 ore utilizzando un computer Hitachi SR2201[22]
- 5 aprile 1999 – Yasumasa Kanada e Daisuke Takahashi: 68 719 470 000 di cifre (68,72 miliardi)[23]
- 20 settembre 1999 - Yasumasa Kanada e Daisuke Takahaski: 206 158 430 000 di cifre (206,16 miliardi)[24]

- 2002 – Yasumasa Kanada: 1241,1 miliardi di cifre calcolate in 600 ore (25 giorni) con un Hitachi SR8000/MPP a 128 nodi[25].
- 29 aprile 2009 – Daisuke Takahashi: 2 576 980 377 524 di cifre (2 576 miliardi) in 29,09 ore con un Supercomputer T2K Open a 640 nodi (velocità di ogni nodo: 147,2 GigaFLOPS), all'Università di Tsukuba a Tsukuba, in Giappone.[26]
- 31 dicembre 2009 – Fabrice Bellard: 2 699 999 990 000[27] di cifre (quasi 3000 miliardi) in 121 giorni di calcolo totali, utilizzando un computer domestico: CPU Intel Core i7 a 2,97 GHz, 6 GB di RAM e 7,5 TB di memoria fissa, utilizzando 5 hard disk Seagate Barracuda da 1,5 TB l'uno. Il calcolo è stato effettuato sfruttando l'algoritmo di Chudnovsky.
- 2 agosto 2010 – Shigeru Kondo: 5 000 000 000 000[28] di cifre (5 000 miliardi) in 90 giorni di calcolo, utilizzando un computer domestico modificato, con 2 processori Intel Xeon X5680 a 3,33 GHz (12 core fisici, 24 con hyperthreading), 12 banchi da 8 GB di RAM, per un totale di 96 GB RAM DDR3 a 1066 MHz; per ottenere il risultato ha sfruttato l'applicazione y-cruncher[29], sviluppata da Alexander Yee, su un OS Microsoft Windows Server 2008.

- 29 gennaio 2020 – Lo statunitense Timothy Mullican calcola 50 000 miliardi di cifre, impiegando 303 giorni per effettuare il calcolo tramite vari computer e server.[30]

Questioni in sospeso

La più pressante questione aperta su π riguarda il fatto che sia o meno normale, cioè se la frequenza con cui è presente ogni sequenza di cifre sia la stessa che ci si aspetterebbe se le cifre fossero completamente casuali. Questo deve essere vero in ogni base, non solo in base 10.[31] Non sappiamo molto su questo; per esempio, non sappiamo nemmeno quali delle cifre 0, …, 9 ricorrano infinite volte nell'espansione decimale di π,[32] benché sia chiaro che almeno due cifre devono ricorrere infinite volte, poiché in caso contrario π sarebbe razionale, mentre non lo è.

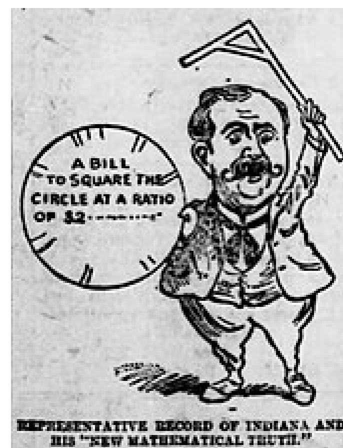
Bailey e Crandall dimostrarono nel 2000 che l'esistenza della sopramenzionata formula Bailey-Borwein-Plouffe e formule simili implica che la normalità in base 2 di π si deduce da una plausibile congettura della teoria del caos.[33]

Non si sa neanche se π e il numero di Nepero e siano algebricamente indipendenti, sebbene Yuri Valentinovich Nesterenko abbia dimostrato l'indipendenza algebrica di {π, e^{π}, Γ(1/4)} nel 1996.[34]

La natura di Pi greco

Mentre, nella geometria euclidea, la somma degli angoli interni di un triangolo misurata in radianti è uguale a π, nelle geometrie non-euclidee la stessa somma può essere maggiore (geometria ellittica) o minore (geometria iperbolica) e il rapporto fra una circonferenza e il suo diametro può non essere π. Questo non cambia la definizione di π, piuttosto cambia la costante che appare nelle formule (che diventa un numero diverso da π). Quindi, in particolare, π non è legato alla forma dell'universo; è una costante matematica, non fisica.

La legge dell'Indiana su Pi greco



Vignetta satirica del 1897, che ridicolizza il progetto di legge.

Nel 1897, negli Stati Uniti d'America, fu presentato all'Assemblea generale dello stato dell'Indiana un disegno di legge,[35] redatto dal matematico e fisico dilettante Edward (o Edwin) J. Goodwin, in cui l'autore si presentava come solutore dei problemi di trisezione dell'angolo, duplicazione del cubo e quadratura del cerchio (la cui impossibilità di soluzione era, all'epoca, già ampiamente dimostrata) e offriva alle scuole dello stato l'uso gratuito della sua "nuova verità matematica", da lui brevettata. Il testo non menzionava specificamente π, ma dalle affermazioni in esso presenti potevano esserne dedotti diversi valori, tra loro contraddittori, tra cui quello di 3,2.

Il progetto superò varie fasi dell'iter legislativo, ma fu infine abbandonato quando venne presentato al Senato per la definitiva approvazione; il professor Clarence Abiathar Waldo, matematico e membro dell'Accademia delle scienze dell'Indiana, riportò in seguito[36] di essere stato casualmente presente al Senato il giorno in cui il progetto di legge doveva essere discusso, e di aver "opportunamente istruito" al riguardo i senatori prima della discussione.

Influenze culturali

Il 14 marzo si celebra il "giorno del pi greco", in quanto, nella sua scrittura anglosassone (3/14), esso ricorda l'approssimazione più comune di π.[37] Pi greco si celebra anche il 22 luglio, in quanto 22/7 è una famosa frazione, nota fin dai tempi di Archimede, che approssima π.

La popstar Kate Bush ha interamente dedicato al numero π il secondo brano (intitolato per l'appunto π) del suo ottavo album *Aerial*, del 2005, nel quale reciterebbe le sue prime 140 cifre. *π 3,14* è inoltre il titolo del quinto album dei Rockets, del 1981. Anche altri musicisti e artisti in genere hanno dedicato alcune loro opere alla costante.

π - Il teorema del delirio è il titolo di un thriller del 1998 diretto dal regista Darren Aronofsky.

Tecniche mnemoniche

È possibile utilizzare la seguente frase per ricordare le prime 19 cifre del numero pi greco, associando a ognuna delle parole il corrispondente numero di lettere che la compongono: "Ave, o Roma o Madre gagliarda di latine virtù che tanto luminoso splendore prodiga spargesti con la tua saggezza".

Note

1. ^ (EN) *Sequenza A000796*, in *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, The OEIS Foundation.
2. ^ http://3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592.com/ind
3. ^ Un calcolo col programma Mathematica ha dato i seguenti risultati: 1 000 termini 3,1458…; 10 000 termini 3,1424…; 100 000 termini 3,1417…
4. ^ Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar saggi Mondadori, 2000, cap. 21.

5. ^ Alcuni risultati ottenuti col programma *Mathematica*: 1 000 termini 3,0603…; 5 000 termini 3,1027…; 50 000 termini 3,1324…; 500 000 termini 3,1379…; 2 milioni di termini 3,1398…; 3 milioni di termini 3,1404…
6. ^ Fu de Morgan che cento anni dopo con alcuni suoi studenti utilizzò stimò pi greco col metodo dell'ago: con 600 lanci ottenne 382 casi favorevoli, ricavando π di 3,14. Il metodo ha però convergenza lenta: per trovare la terza cifra decimale occorrono decine di migliaia di lanci.
7. (EN) *Sequenza A001203*, in *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, The OEIS Foundation.
8. ^ L. J. Lange, *An Elegant Continued Fraction for π*, in *The American Mathematical Monthly*, vol. 106, n. 5, May 1999, pp. 456–458, DOI:10.2307/2589152, JSTOR 2589152.
9. ^ The world of Pi - Simon Plouffe / David Bailey (http://www.pi314.net/eng/ramanujan.php)
10. ^ Collection of series for π (http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/piSeries.html)
11. *De Architectura* X, 9, 1, in linea (http://penelope.uchicago.edu/Thayer/L/Roman/Texts/Vitruvius/10*.html) su LacusCurtius.
12. ^ Questa spiegazione era nota anche al Talmud ed è riportata insieme a molte altre in [1] (http://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/Pdf/ElishakoffPines.pdf) (p. 139). Cfr. anche: [2] (http://recoveredscience.com/const100solomonpi.htm) oppure [3] (https://faithfulphilosophy.wordpress.com/2016/10/30/is-1-kings-723-wrong-about-pi/). Altre spiegazioni (http://www.khouse.org/articles/1998/158/) sono meno attendibili perché i manoscritti più antichi della Bibbia ebraica risalgono circa al secolo X dopo Cristo.
13. ^ Boyer 1991 p. 149
14. ^ Boyer 1991 p. 256
15. ^ Yoshio Mikami, *Development of Mathematics in China and Japan*, B. G. Teubner, 1913, p. 50.
22+355&dq=intitle:Development+intitle:22China+and+Japan%22+355&lr=&as_brr=0&as_pt=AL (http://books.google.com/books?id=4e9LAAAAMAAJ&q=intitle:Development+intitle:%22China+and+Japan)
16. ^ Definita la più bella formula della matematica da Richard Feynman (Richard Feynman, *Chapter 22: Algebra*, in *The Feynman Lectures on Physics: Volume I*, giugno 1970, p. 10.). Nel 1988, i lettori del *Mathematical Intelligencer* la votarono come "La più bella formula matematica di sempre" David Wells, *Are these the most beautiful?*, in *Mathematical Intelligencer*, vol. 12, n. 3, 1990, pp. 37–41, DOI:10.1007/BF03024015.
David Wells, *Which is the most beautiful?*, in *Mathematical Intelligencer*, vol. 10, n. 4, 1988, pp. 30–31, DOI:10.1007/BF03023741.
17. ^ Il testo del disegno di legge è consultabile sul sito della Purdue University: The Indiana Pi Bill (http://www.agecon.purdue.edu/crd/Localgov/Second%20Level%20pages/indiana_pi_bill.htm)
18. ^ Dimostrazione che $^{22}/_{7}$ è maggiore di π (https://it.wikibooks.org/wiki/Dimostrazione_che_22/7_%C3%A8_maggiore_di_%CF%80)
19. ^ La frazione $^{377}/_{120}$ approssima il rapporto fra la circonferenza e il diametro di un cerchio di raggio 60, laddove il 60 coincide con la base dei numeri sessagesimali utilizzati da Tolomeo nell'Almagesto.
20. ^ ftp://pi.super-computing.org/README.our_last_record_3b
21. ^ ftp://pi.super-computing.org/README.our_last_record_6b
22. ^ ftp://pi.super-computing.org/README.our_last_record_51b
23. ^ ftp://pi.super-computing.org/README.our_last_record_68b
24. ^ ftp://pi.super-computing.org/README.our_latest_record_206b
25. ^ *SR8000*, su *hitachi.co.jp*. URL consultato il 30 ottobre 2010 (archiviato dall'url originale il 20 maggio 2011).
26. ^ *Copia archiviata*, su *hpcs.is.tsukuba.ac.jp*. URL consultato il 18 agosto 2009 (archiviato dall'url originale il 23 agosto 2009).
27. ^ http://bellard.org/pi/pi2700e9/pipcrecord.pdf

28. ^ Pi - 5 Trillion Digits (http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-5t/announce_en.html)
29. ^ y-cruncher - A Multi-Threaded Pi Program (http://www.numberworld.org/y-cruncher/)
30. ^ (EN) *Calculating Pi: My attempt at breaking the Pi World Record* (https://blog.timothymullican.com/calculating-pi-my-attempt-breaking-pi-record)
31. ^ Eric W Weisstein, *Normal Number*, MathWorld, 22 dicembre 2005. URL consultato il 10 novembre 2007.
32. ^ Paul Preuss, *Are The Digits of Pi Random? Lab Researcher May Hold The Key*, Lawrence Berkeley National Laboratory, 23 luglio 2001. URL consultato il 10 novembre 2007.
33. ^ Ivars Peterson, *Pi à la Mode: Mathematicians tackle the seeming randomness of pi's digits*, in *Science News Online*, 1º settembre 2001. URL consultato il 10 novembre 2007 (archiviato dall'url originale il 21 ottobre 2007).
34. ^ Nesterenko, Yuri V, *Modular Functions and Transcendence Problems*, in *Comptes rendus de l'Académie des sciences Série 1*, vol. 322, n. 10, 1996, pp. 909–914.
35. ^ http://www.agecon.purdue.edu/crd/Localgov/Second%20Level%20pages/indiana_pi_bill.htm
36. ^ *What might have been*, in *Proceedings of the Indiana Academy of Science*, p. 455-456.
37. ^ www.corriere.it (http://www.corriere.it/scienze_e_tecnologie/10_marzo_14/pi-greco-compleanno_593a9a2c-2f90-11df-a29d-00144f02aabe.shtml)

Bibliografia

- Giovanni Gentili Belloni, *Pi greco - 4000 anni di storia dalle Piramidi al computer*, Edizioni Lulu, 2007.
- Jean-Paul Delahaye, *L'affascinante numero π*, Ghisetti e Corvi Editori, Milano, 2003, ISBN 88-8013-905-3
- David Blatner, *Le gioie del π*, Garzanti, Milano, 1999
- Petr Beckmann, *A History of π*. St. Martin's Press; 1971.
- Philip J. Davis, *Il mondo dei grandi numeri* . Zanichelli Bologna

Sulla legge dell'Indiana:

- "Indiana's squared circle" di Arthur E. Hallerberg (Mathematics Magazine, vol. 50 (1977), pp. 136–140).
- David Singmaster, "The legal values of pi" (Mathematical Intelligencer, vol. 7 (1985), pp. 69 – 72).

Voci correlate

- Costante
- Costante matematica
- Calcolo di pi greco
- Cerchio
- Circonferenza
- Identità di Eulero
- Ago di Buffon
- Dimostrazione che 22/7 è maggiore di π
- Papiro di Rhind
- Quadratura del cerchio
- Giorno del Pi greco

- Pi greco (prime 100.000 cifre)
- Punto di Feynman
- Dimostrazione della irrazionalità di π
- Definizione rigorosa del Pi greco in geometria euclidea

Altri progetti

- Wikisource contiene una pagina dedicata al **pi greco**
- Wikiquote contiene citazioni sul **pi greco**
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file sul **pi greco (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Pi?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Pi greco*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.

Siti sulla storia di π

- *J J O'Connor e E F Robertson: A history of Pi. Mac Tutor project*, su *www-history.mcs.st-andrews.ac.uk*.
- *Alla ricerca del valore di Pi*, su *mathforum.org*.
- PlanetMath: Pi (https://planetmath.org/encyclopedia/Pi.html)
- *Storia del calcolo di Pi di Alessandra Del Piccolo - Progetto Polymath*, su *www2.polito.it*. URL consultato il 16 febbraio 2007 (archiviato dall'url originale il 7 gennaio 2007).
- (EN) Richard Preston, *The Mountains of Pi*, New Yorker, 2 marzo 1992. URL consultato il 27 luglio 2009.
- Il pi greco? Non è soggetto a copyright (http://www.corriere.it/cronache/12_marzo_17/pi-copyright-dipasqua_6d066c74-704e-11e1-a5a4-3511fb610746.shtml) dal Corriere della Sera

Siti con formule per calcolare π

- Birth, growth and computation of pi (http://www.advancesindifferenceequations.com/content/pdf/1687-1847-2013-100.pdf) (articolo molto dettagliato)
- Pi Formulas (http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html) su *Wolfram Math World*
- *Collection of Series for pi*, su *numbers.computation.free.fr*.

Siti con le cifre di π

- *Il primo milione di cifre di pi greco*, su *nullrefer.com*.
- *Statistiche sui primi 1200 miliardi di cifre di pi*, su *super-computing.org*. URL consultato il 5 giugno 2004 (archiviato dall'url originale il 9 gennaio 2010).
- *Un testo del Progetto Gutenberg contenente un milione di cifre di pi*, su *gutenberg.net*.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 6838 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=6838) · LCCN (EN) sh85101712 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85101712) · GND (DE) 4174646-6 (https://d-nb.info/gnd/4174646-6) · NDL (EN, JA) 00562015 (https://id.ndl.go.jp/auth/ndlna/00562015)